Єдиний державний екзамен з МАТЕМАТИКИ

Демонстраційний варіант контрольних вимірювальних матеріалів для проведення в 2018 році єдиного державного екзамену з МАТЕМАТИКИ

Пояснення до демонстраційного варіанту контрольних вимірювальних матеріалів для ЄДЕ з математики 2018 року

Демонстраційний варіант призначений для того, щоб дати уявлення про структуру майбутніх контрольних вимірювальних матеріалів, кількість завдань, їх форму та рівень складності.

Завдання демонстраційного варіанту не відображають всіх питань змісту, які можуть бути включені в контрольні вимірювальні матеріали в 2018 році. Структура роботи наведена в специфікації, а повний перелік питань – у кодифікаторах елементів змісту і вимог до рівня підготовки випускників загальноосвітніх організацій для проведення єдиного державного екзамену 2018 р. з математики.

Екзаменаційна робота складається з двох частин, які відрізняються за змістом, складністю і кількістю завдань. Визначальною ознакою кожної частини роботи є форма завдань:

– частина 1 містить 11 завдань (завдання 1-11) з короткою відповіддю;

– частина 2 містить 4 завдання (завдання 12-15) з короткою відповіддю і шість завдань (завдання 16-21) з розгорнутою відповіддю.

За рівнем складності завдання розподіляються наступним чином: завдання 1-11 мають базовий рівень; завдання 12-19 – підвищений рівень; завдання 20-21 належать до високого рівня складності.

Завдання першої частини призначені для визначення математичних компетентностей випускників освітніх організацій, що реалізують програми середньої (повної) загальної освіти на базовому рівні.

Завдання з короткою відповіддю (1-15) вважається виконаним, якщо у бланку відповідей №1 зафіксована правильна відповідь у вигляді цілого числа чи скінченного десяткового дробу.

Завдання 16-21 з розгорнутою відповіддю, у складі яких чотири завдання підвищеного і два завдання високого рівня складності, призначені для більш точної диференціації абітурієнтів вузів.

Правильне рішення кожного із завдань 1-15 оцінюється одним балом.

Правильне рішення кожного із завдань 16-17 оцінюється 2 балами; 18 і 19 – 3 балами; 20-21 – 4 балами. Максимально первинний бал за виконання всієї роботи – 33 бали.

До кожного завдання з розгорнутою відповіддю, що включений у демонстраційний варіант, пропонується одне з можливих рішень. Наведені критерії оцінювання дозволяють скласти уявлення про вимоги до повноти і правильності рішень.

Демонстраційний варіант контрольних вимірювальних матеріалів, система оцінювання, специфікація і кодифікатори допоможуть виробити стратегію підготовки до ЄДЕ з математики.

Інструкція щодо виконання роботи

Екзаменаційна робота складається з двох частин і містить 21 завдання.

Частина 1 містить 11 завдань базового рівня складності з короткою відповіддю.

Частина 2 містить 4 завдання підвищеного рівня складності з короткою відповіддю і 6 завдань підвищеного і високого рівня складності з розгорнутою відповіддю.

На виконання екзаменаційної роботи з математики відводиться 3 години 55 хвилин (235 хвилин).

Відповіді до завдань 1-15 записуються у вигляді цілого числа або скінченного десяткового дробу.

Числа запишіть у поля відповідей в тексті роботи, а потім перенесіть у бланк відповідей № 1.

Відповідь: *–0,8* . 10 | - | 0 | , | 8

При виконанні завдань 16-21 потрібно записати повне рішення і відповідь у бланку відповідей № 2.

Всі бланки ЄДЕ заповнюються яскравими чорними чорнилами.

Допускається використання гелевої, капілярної або пір’яної ручок.

При виконанні завдань можна користуватися чернеткою. Записи у чернетці не враховуються при оцінюванні роботи.

Бали, отримані Вами за виконані завдання, підсумовуються. Намагайтеся виконати якомога більше завдань і набрати найбільшу кількість балів.

Бажаємо успіху!

Відповіддю до завдань 1-11 є ціле число або скінченний десятковий дріб. Відповідь запишіть у БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ № 1 праворуч від номера виконуваного завдання, починаючи з першої клітинки. Кожну цифру, знак мінус і кому пишіть в окремій клітинці у відповідності з наведеними у бланку зразками. Одиниці вимірювань писати не потрібно.

Частина 1

1.Найпростіші задачі.

Влітку кілограм полуниці коштує 75 рублів. Маша купила 2 кг 200г полуниці. Скільки рублів здачі вона повинна отримати з 200 рублів?

Розв'язання.

75·2,2=165(рублів) коштує полуниця.

200-165=35(рублів) отримає здачі.

Відповідь: 35.

2. Задачі на відсотки.

У школі 800 учнів, з них 30% — учні початкової школи. Серед учнів середньої та старшої школи 20% вивчають німецьку мову. Скільки учнів у школі вивчають німецьку мову, якщо в початковій школі німецька мова не вивчається?

Розв'язання.

Учнів початкової школи $800 \cdot 0{,}3 = 240$, а учнів середньої та старшої школи — $800 - 240 = 560$. Значить, німецьку мову у школі вивчають

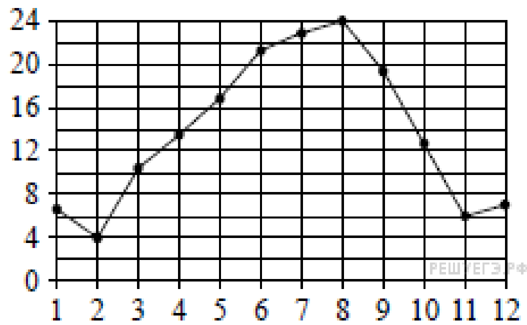
$560 \cdot 0{,}2 = 112$ учнів.

Відповідь: 112.

3.Читання графіків і діаграм.

На рисунку точками показана середня температура повітря в Сочі за кожен місяць 1920 року. По горизонталі вказуються місяці, по вертикалі — температура в градусах Цельсія. Для наочності точки з'єднані лінією.

Скільки місяців середня температура була більше 18 градусів Цельсія?



Розв'язання.

З графіка видно, що середньомісячна температура була вище 18 градусів Цельсія протягом чотирьох місяців з червня по вересень.

Відповідь: 4.

4. Робота з формулами.

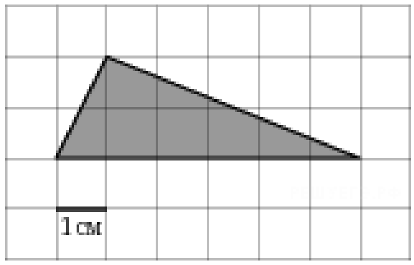
Другий закон Ньютона можна записати у вигляді $F=ma$, де F – сила (в ньютонах), що діє на тіло, m – його маса (в кілограмах), a – прискорення, з яким рухається тіло (в м/с^2). Знайдіть m, якщо $F=84$, $a=12$.

Розв'язання.

m = F: *a*   m = 84:12 = 7

Відповідь:7.

5. ***Квадратна решітка, координатна площина.***



На картатому папері з розміром клітини 1 см $\times$ 1 см зображено трикутник. Знайдіть його площу. Відповідь запишіть в см^2.

Розв'язання.

Площа трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту, проведеної до цієї основи. Тому $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$ см^2.

Відповідь: 6.

6. ***Початки теорії ймовірностей.***

У збірнику білетів з біології всього 25 білетів. Тільки у двох білетах зустрічається питання про гриби. На екзамені школяреві дістається один випадково вибраний білет з цього збірника. Знайдіть ймовірність того, що у цьому білеті буде питання про гриби.

Розв'язання.

З 25 білетів 2 містять питання про гриби, тому ймовірність того, що у випадково вибраному на екзамені білеті школяреві дістанеться питання про гриби, дорівнює $\frac{2}{25} = 0,08.$

Відповідь: 0,08.

7.Найпростіші рівняння

Знайдіть корінь рівняння $3^{x-5} = 81$.

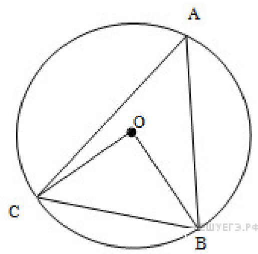
Розв'язання.

Перейдемо до однієї основи степені:

$$3^{x-5} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-5} = 3^4 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$$

Відповідь: 9.

8. ***Планіметрія: задачі , пов'язані з кутами.***



Трикутник *ABC* вписаний у коло з центром *O*. Кут *BAC* дорівнює 32°. Знайдіть кут *BOC*. Дайте відповідь у градусах.

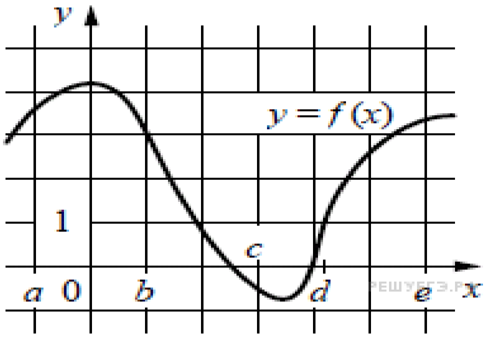
Розв'язання.

Вписаний кут дорівнює половині дуги, на яку він опирається, а центральний кут дорівнює дузі, на яку він опирається. Тому центральний кут *BOC* вдвічі більше вписаного кута *BAC* (див. рис.). Таким чином, він дорівнює 64°.

Відповідь: 64.

9. Аналіз графіків і діаграм.

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Числа a, b, c, d і e задають на осі x чотири інтервали. Користуючись графіком, поставте у відповідність кожному інтервалу характеристику функції чи її похідної.



Нижче вказані значення похідної в даних точках. Користуючись графіком, поставте у відповідність кожній точці значення похідної до неї.

ТОЧКИ **ЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ**

А) (a; b)
Б) (b; c)
В) (c; d)
Г) (d; e)

1) похідна від'ємна на всьому інтервалі
2) похідна додатна на початку інтервалу і від'ємна у кінці інтервалу
3) функція від'ємна на початку інтервалу і додатна у кінці інтервалу
4) похідна додатна на всьому інтервалі

Запишіть у відповідь цифри, розташувавши їх у порядку, що відповідають буквам:

А	Б	В	Г

Пояснення.

Якщо функція зростає, то похідна додатна і навпаки.

На інтервалі (a;b) похідна додатна на початку інтервалу і від'ємна в кінці, тому що функція на початку зростає, а потім спадає.

На інтервалі (b;c) похідна від'ємна, так як функція спадає.

На інтервалі (c;d) функція від'ємна на початку інтервалу і додатна у кінці інтервалу.

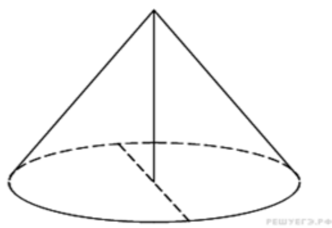
На інтервалі (d;e) похідна додатна, тому що функція зростає.

Таким чином, отримуємо відповідність А — 2, Б — 1, В — 3 і Г — 4.

Відповідь: 2134.

10.*Стереометрія.*

Висота конуса дорівнює 5, а діаметр основи – 24. Знайдіть твірну конуса.



Розв'язання.

Радіус конуса R=12. Використовуючи теорему Піфагора, знайдемо довжину твірної:

L=$\sqrt{25+144}$ =13

Відповідь: 13.

11.Вибір оптимального варіанта.

Для групи іноземних гостей необхідно купити 30 путівників. Потрібні путівники знайшлися у трьох інтернет-магазинах. Ціна путівника та умови доставки всієї купівлі наведені у таблиці.

Інтернет-магазин	**Ціна одного путівника (руб.)**	**Вартість доставки (руб.)**	**Додаткові умови**
А	255	350	немає
Б	270	300	Доставка безкоштовно, якщо сума замовлення перевищує 8000 р.
В	245	450	Доставка безкоштовно, якщо сума замовлення перевищує 7500 р.

У скільки рублів обійдеться найбільш дешевий варіант купівлі з доставкою?

Розглянемо всі варіанти.

При купівлі у магазині А ціна тридцяти путівників складе 7650 руб., з доставкою — 8000 руб.

При купівлі у магазині Б ціна тридцяти путівників складе 8100 руб., доставка буде безкоштовною.

При купівлі у магазині В ціна тридцяти путівників складе 7350 руб., з доставкою — 7800 руб.

Отже, найменша вартість купівлі з урахуванням доставки складає 7800 руб.

Відповідь: 7800.

Не забудьте перенести всі відповіді у бланк відповідей №1

ЧАСТИНА 2

Відповіддю на завдання 12-15 повинно бути ціле число або скінченний дріб. Відповідь необхідно записати у бланк відповідей № 1 праворуч від номера виконуваного завдання, починаючи з першої клітинки. Кожну цифру, знак мінус та кому пишіть в окремій клітинці відповідно до наведених у бланку зразків. Одиниці вимірювань писати не потрібно.

12. Обчислення і перетворення.

Знайдіть $\sin 2\alpha$ якщо $\cos\alpha = 0.6,\ \pi < \alpha < 2\pi$

Розв'язання.

Зауважимо, що кут α лежить в четвертій чверті, його синус від'ємний:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0,36} = -0,8.$$

Далі використовуємо формулу синуса подвійного кута:
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0,8)\cdot 0,6 = -0,96.$

Відповідь: − 0,96.

<u>13. Стереометрія.</u>

У першій циліндричній посудині рівень рідини досягає 16 см. Цю рідину перелили в другу циліндричну посудину, діаметр основи якої в 2 рази більше діаметра основи першої. На якій висоті буде перебувати рівень рідини в другій посудині? Відповідь запишіть в см.

Розв'язання.

Об'єм циліндричної посудини виражається через її діаметр і висоту як V=$\frac{\pi d^2 h}{4}$. При збільшенні діаметра посудини у 2 рази висота рівного об'єму рідини H=$\frac{4V}{\pi d^2}$ зменшиться в 4 рази і буде дорівнювати 4.

Відповідь: 4.

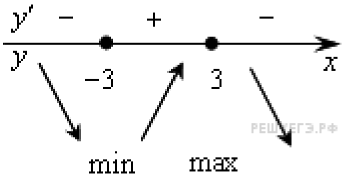
<u>14.Найбільше і найменше значення функції.</u>

Знайдіть найбільше значення функції y = 5 + 9x - $\frac{x^3}{3}$на відрізку [-3;3]

Знайдемо похідну заданої функції:
$y' = 9 - x^2 = (3-x)(3+x).$

Знайдемо нулі похідної: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$

Визначимо знаки похідної функції і зобразимо на рисунку поводження функції:



Знайдена похідна невід'ємна на заданому відрізку, задана функція зростає на ньому, тому найбільше значення функції на відрізку є:
$y(3) = 5 + 27 - 9 = 23.$

Відповідь: 23.

15. ***<u>Текстові задачі</u>***.

Моторний човен пройшов проти течії річки 112 км і повернувся в пункт відправлення, витративши на зворотний шлях на 6 годин менше. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість човна в нерухомій воді дорівнює 11 км / год. Відповідь запишіть у км / год.

Розв'язання.

Нехай u км/год – швидкість течії річки, тоді швидкість човна за течією дорівнює $11+u$ км/год, а швидкість човна проти течії дорівнює $11-u$ км/год. На зворотний шлях човен витратив на 6 год менше, звідси маємо:

$$\frac{112}{11-u} - \frac{112}{11+u} = 6 \Leftrightarrow \frac{224u}{(11-u)(11+u)} = 6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121-u^2} = 3 \underset{u>0}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow 112u = 3(121 - u^2) \Leftrightarrow 3u^2 + 112u - 363 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{-56 + \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3}; \\ v = \dfrac{-56 - \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 3; \\ v = -\dfrac{121}{3} \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v = 3.$$

Таким чином, швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

Відповідь: 3.

Не забудьте перенести всі відповіді у бланк відповідей № 1

Для запису рішень і відповідей на завдання 16-21 використовуйте БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ №2. Запишіть спочатку номер виконуваного завдання (16, 17 і т.д.), а потім повне обґрунтоване рішення і відповідь. Відповіді записуйте чітко і розбірливо.

16. **<u>Рівняння, система рівнянь.</u>**

а) Розв'яжіть рівняння $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

б) Знайдіть корені цього рівняння, що належить проміжку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$

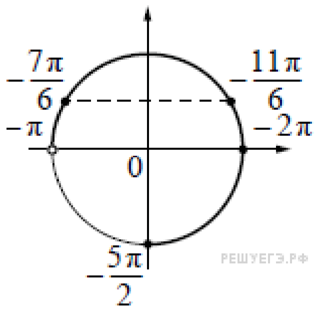
Розв'язання.

а) Перетворимо обидві частини рівняння:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0.$$

звідки $\sin x = 0$ або $\sin x = \frac{1}{2}$.

З рівняння $\sin x = 0$ знаходимо: $x = \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$. З рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ знаходимо: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.



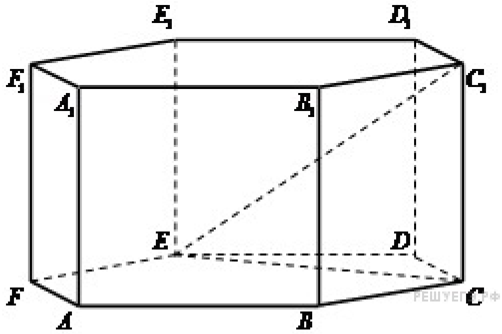
б) З допомогою числового кола відберемо корені, що належать проміжку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$. Одержимо числа: -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Відповідь: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

17. ***<u>Кути і відстані у просторі.</u>***

У правильній шестикутній призмі $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ всі ребра якої дорівнюють 10, знайдіть відстань від точки E до прямої B_1C_1.

Розв'язання.



Так як $ABCDEF$ — правильний шестикутник, прямі BC і CE перпендикулярні. Оскільки прямі BCі B_1C_1 паралельні, CE перпендикулярно B_1C_1. Тоді за теоремою про три перпендикуляри EC_1перпендикулярна B_1C_1, тому довжина відрізка EC_1дорівнює шуканій відстані.

За умовою $CC_1 = 10$, діагональ правильного шестикутника $CE = 10\sqrt{3}$. Тоді за теоремою Піфагора для трикутника ECC_1знаходимо, що $EC_1 = 20$.

Відповідь: 20.

<u>18. Нерівності.</u>

Розв'яжіть систему нерівностей.

$$\begin{cases} 2^x + \dfrac{80}{2^x} \geq 21, \\ \log_{x-1}\left(\dfrac{x+1}{5}\right) \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зауважимо, що $2^x > 0$ при всіх значеннях змінної, тому першу нерівність можна помножити на 2^x, не змінюючи її знака, звідти маємо:

$$4^x + 80 \geq 21 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 21 \cdot 2^x + 80 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \geq 16, \\ 2^x \leq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq \log_2 5. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо другу нерівність системи, використовуючи теорему про знаки логарифма:

$$\log_{x-1}\left(\frac{x+1}{5}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2)\left(\dfrac{x+1}{5} - 1\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2) \cdot \dfrac{x-4}{5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 4.$$

Оскільки $2 < \log_2 5 < 3$, отримуємо розв'язок вихідної системи нерівностей: $2 < x \leq \log_2 5,\ x = 4.$

Відповідь: $(2, \log_2 5] \cup \{4\}.$

<u>19.Планіметричні задачі.</u>

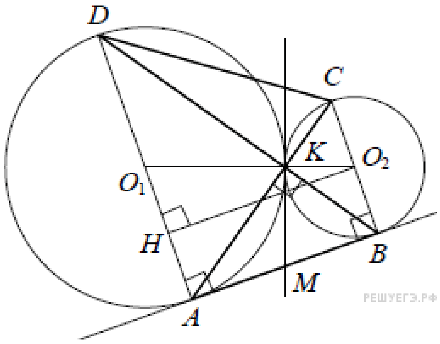
Два кола дотикаються зовнішнім чином до точки *K*. Пряма *AB* дотикається першого кола в точці *A*, а друга – в точці *B*. Пряма *BK* перетинає перше коло в точці *D,* пряма *AK* перетинає друге коло в точці *C.*

а) Доведіть, що прямі *AD* і *BC* паралельні.

б) Знайдіть площу трикутника *AKB*, якщо відомо, що радіуси кіл дорівнюють 4 і 1.

Розв'язання.

а) Позначимо центри кіл O_1 і O_2 відповідно. нехай спільна дотична, проведена до кіл в точці K, перетинає AB в точці M. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, $AM = KM$ і $KM = BM$. Трикутник AKB, у якого медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, прямокутний. Вписаний кут AKD прямий, тому він опирається на діаметр AD. Значить, $AD \perp AB$. Аналогічно, отримуємо, що $BC \perp AB$. Отже, прямі AD і BC паралельні.



б) Нехай, для визначеності, перше коло має радіус 4, а друге — радіус 1.

Трикутники BKC і AKD подібні, $\frac{AD}{BC} = 4.$ Нехай $S_{BKC} = S$, тоді $S_{AKD} = 16S$. У трикутників AKD і AKB спільна висота, отже, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$; тобто $S_{AKB} = 4S$. Аналогічно, $S_{CKD} = 4S$. Площа трапеції $ABCD$ дорівнює $25S$.

Обчислимо площу трапеції $ABCD$. Проведемо до AD перпендикуляр O_2H, що дорівнює висоті трапеції, і знайдемо його з прямокутного трикутника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$ Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Отже, $25S = 20$, звідки $S = 0{,}8$ і $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Відповідь: 3,2.

20.Рівняння, нерівності та їх системи з параметрами.

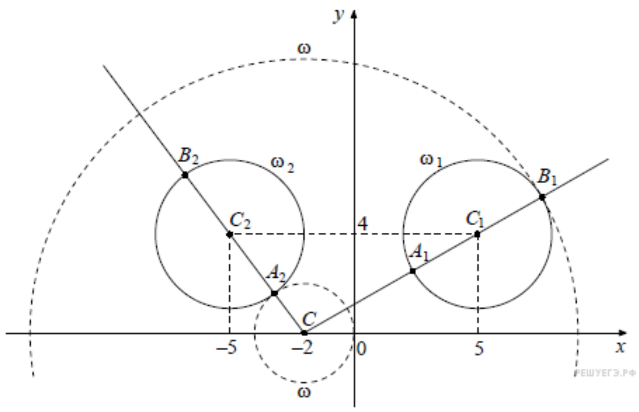
Знайдіть всі додатні значення a, при кожному з яких система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

Якщо $x \geq 0$, то рівняння $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$ задає коло ω_1 з центром в точці C_1 (5; 4) радіусом 3, а якщо $x < 0$, то воно задає коло ω_2 з центром в точці C_2 (−5; 4) таким же радіусом (див. рисунок).



При додатних значеннях a рівняння $(x + 2)^2 + y^2 = a^2$ задає коло ω з центром в точці C (−2; 0) радіусом a. Тому задача полягає в тому, щоб знайти всі значення a, при кожному з яких коло ω має єдину спільну точку з об'єднанням кіл ω_1 і ω_2.

З точки C проведемо промінь CC_1 і позначимо через A_1 і B_1 точки його перетину з колом ω_1, де A_1 лежить між C і C_1. Так як

$$CC_1 = \sqrt{(5+2)^2+4^2} = \sqrt{65},$$

то $CA_1 = \sqrt{65} - 3,\ CB_1 = \sqrt{65} + 3.$

При $a < CA_1$ або $a > CB_1$ кола ω і ω_1 не перетинаються.

При $CA_1 < a < CB_1$ кола ω і ω_1 мають дві спільні точки.

При $a = CA_1$ або $a = CB_1$ кола ω і ω_1 дотикаються.

З точки C проведемо промінь CC_2 і позначено через A_2 і B_2 точки його перетину з колом ω_2, де A_2 лежить між C і C_2. Так як

$$CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2+4^2} = 5,$$

то $CA_2 = 5 - 3 = 2,\ CB_2 = 5 + 3 = 8.$

При $a < CA_2$ або $a > CB_2$ кола ω і ω_2 не перетинаються.

При $CA_2 < a < CB_2$ кола ω і ω_2 мають дві спільні точки.

При $a = CA_2$ або $a = CB_2$ кола ω і ω_2 дотикаються.

Вихідна система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли коло ω дотикається рівно одним з двох кіл ω_1 і ω_2 і не перетинається з іншим. Так як $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то умові задачі задовольняють тільки числа $a = 2,\ a = \sqrt{65} + 3.$

Відповідь: $2;\ \sqrt{65} + 3.$

<u>21. Числа і їх властивості.</u>

Задумано кілька (не обов'язково різних) натуральних чисел. Ці числа і все їх можливі суми (по 2, по 3 і т.д.) виписують на дошці в порядку неспадання. Якщо якесь число n, виписане на дошці, повторюється кілька разів, то на дошці залишається одне таке число n, а решта чисел, що дорівнюють n, стираються. Наприклад, якщо задумані числа 1, 3, 3, 4, то на дошці буде записаний набір 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Наведіть приклад задуманих чисел, для яких на дошці буде записаний набір 3, 6, 9, 12, 15.

б) Чи існує приклад таких задуманих чисел, для яких на дошці буде записаний набір 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Наведіть всі приклади задуманих чисел, для яких на дошці буде записаний набір 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Розв'язання.

а) Задумані числа 3, 3, 3, 3, 3 дають необхідний набір, записаний на дошці.

б) Оскільки задумані числа натуральні, найменше число в наборі — це найменше з задуманих чисел, а найбільше число в наборі — це сума всіх задуманих чисел. Серед чисел записаного набору повинна бути сума всіх чисел, крім найменшого, тобто 23 − 1 = 22. Але цього числа немає в наборі, тому не існує приклада таких задуманих чисел, для якого на дошці буде виписаний набір з умови.

в) Число 8 — найменше число в наборі — є найменшим із задуманих чисел, а найбільше число в наборі – це сума всіх задуманих чисел. Тому кількість задуманих чисел не перевищує цілої частини числа $\frac{47}{8}$, тобто 5. Крім того, числа 9 і 10 менші, ніж сума двох вісімок, тому вони також є задуманими. Значить, сума задуманих чисел, що залишилась, дорівнює $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким чином, так як найменше задумане число дорівнює 8, задумані числа, що залишилися, – це 10 і 10 або 20 (якби 20 виходило як 8 + 12 або 9 + 11, то були б виписані числа 12 або 11, але їх немає). Для задуманих чисел 8, 9, 10, 10, 10 і 8, 9, 10, 20 на дошці буде записаний набір, даний в умові. (Для чисел 8, 9, 10, 20 це можна перевірити безпосередньо, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — помітити, що вони будуть давати точно ті ж суми, що і числа 8, 9, 10, 20.)

В і д п о в і д ь: а) 3, 3, 3, 3,3; б) ні; в) 8, 9, 10, 10, 10 або 8, 9, 10, 20.